# Introduction (1)

Un grand nombre de mouvements se répètent de façon régulière au cours du temps: les vibrations d'un cristal de quartz d'une montre, le balancement régulier du pendule d'une horloge de grand-père, les vibrations acoustiques produites par un violoncelle, les allers retours d'un piston de moteur à explosion. Ces types de mouvements, appelés **mouvements périodiques ou oscillation**, sont l'objet de ce chapitre. Un système physique sujet à un mouvement périodique possède toujours **une position d'équilibre**.

# Introduction (2)

Lorsqu'il est écarté de cette position d'équilibre et ensuite laissé libre, **une force de rappel** intervient toujours pour ramener le système à sa position d'équilibre. Mais entre-temps, le système a gagné de l'énergie cinétique et va aller plus loin que sa position d'équilibre, s'arrêter quelque part de l'autre côté de la position d'équilibre pour repartir dans l'autre sens vers la position d'équilibre et ainsi de suite. Dans ce chapitre, nous allons concentrer notre étude sur un système simple qui exhibe un mouvement périodique : **l'oscillateur harmonique**

# Introduction (3)

Il s'agit d'un modèle physique type à partir duquel nous allons pouvoir extraire les propriétés physiques et mathématiques caractéristiques des mouvements périodiques. L'importance du concept d'oscillateur harmonique vient de ce qu'il est **l'un des systèmes les plus étudiés en physique**, en effet, **il représente le comportement d'un grand nombre de systèmes physiques** lorsqu'ils sont faiblement perturbé au voisinage d'une position d'équilibre stable.

# Définitions (1)

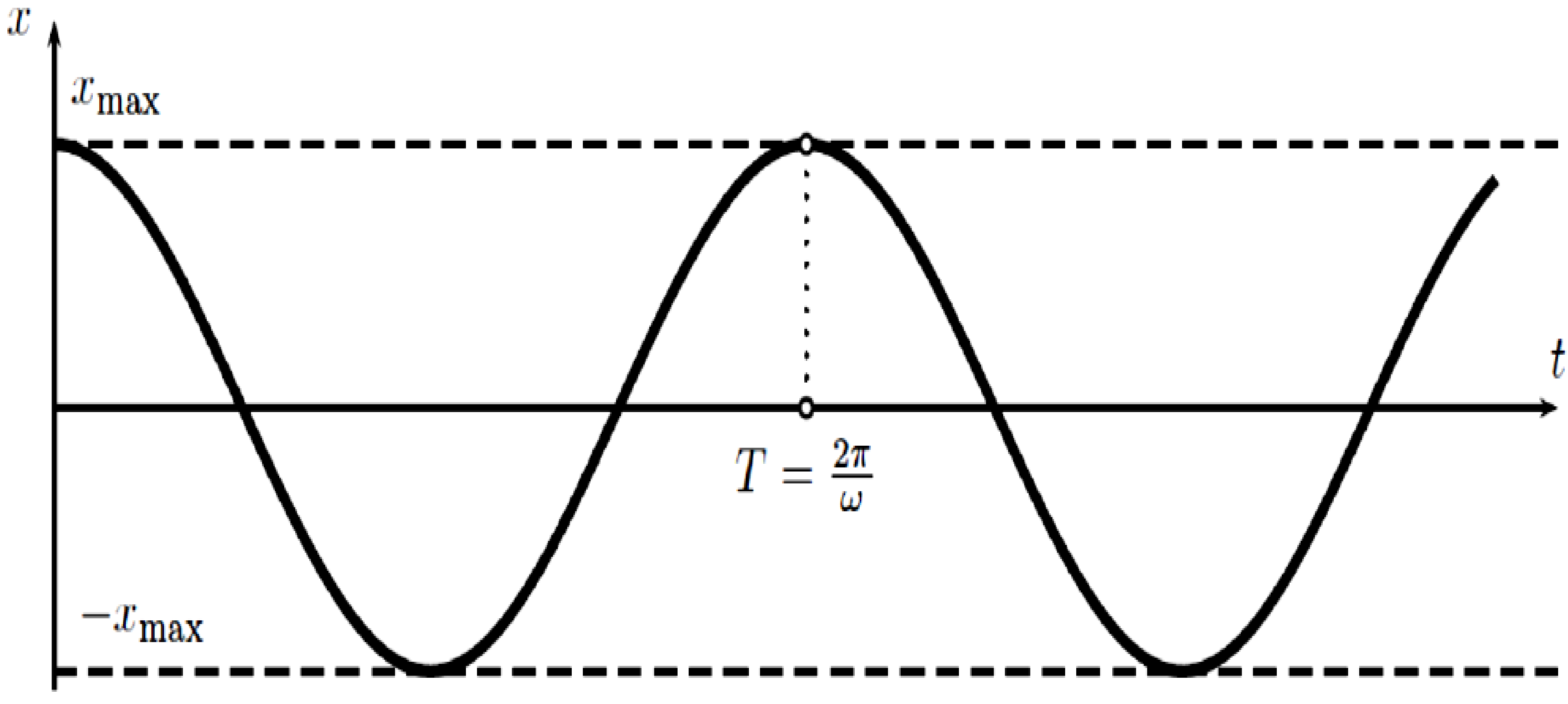
On appelle oscillateur harmonique tout système dont le paramètre ou degré de liberté $x(t)$ qui le caractérise est une fonction sinusoïdale du temps. Cette fonction peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)}}$$

- ✓ $x(t)$ : l'élongation ou la position à l'instant $t$. Elle varie entre les valeurs $-X_m$ et $X_m$
- ✓ $X_m$ : élongation maximale ou amplitude de l'élongation, à ne pas confondre avec **l'amplitude crête à crête** qui désigne l'écart entre les valeurs extrêmes (soit $2X_m$)
- ✓ $\omega$ : pulsation
- ✓ $\varphi$ : phase initiale ou phase à l'origine des temps $(t = 0)$
- ✓ $\omega t + \varphi$ : phase à l'instant $t$

# Définitions (2)

L'évolution temporelle d'un oscillateur harmonique est représentée ci-après



# Equation différentielle (1)

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -X_m \omega \sin(\omega t + \varphi) \\ \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -X_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -X_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t) \Longrightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

L'équation différentielle du mouvement est donc :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

**C'est l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique**

# Equation différentielle (2)

Les solutions sont de la forme sinusoïdale d'où le terme harmonique.
Les conditions initiales sont définies à l'instant $t = 0$ :

$$\boxed{\begin{cases} x(t=0) = x_0 = X_m \cos\varphi \\ \dfrac{dx(t=0)}{dt} = v_0 = -X_m \omega \sin\varphi \end{cases}}$$

On peut encore écrire

$$x(t) = X_m \cos\varphi \cos\omega t - X_m \sin\varphi \sin\omega t$$

ou encore $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ où $A$ et $B$ sont des constantes à déterminer par les conditions initiales.

# Equation différentielle (3)

En tenant compte des conditions initiales on a :

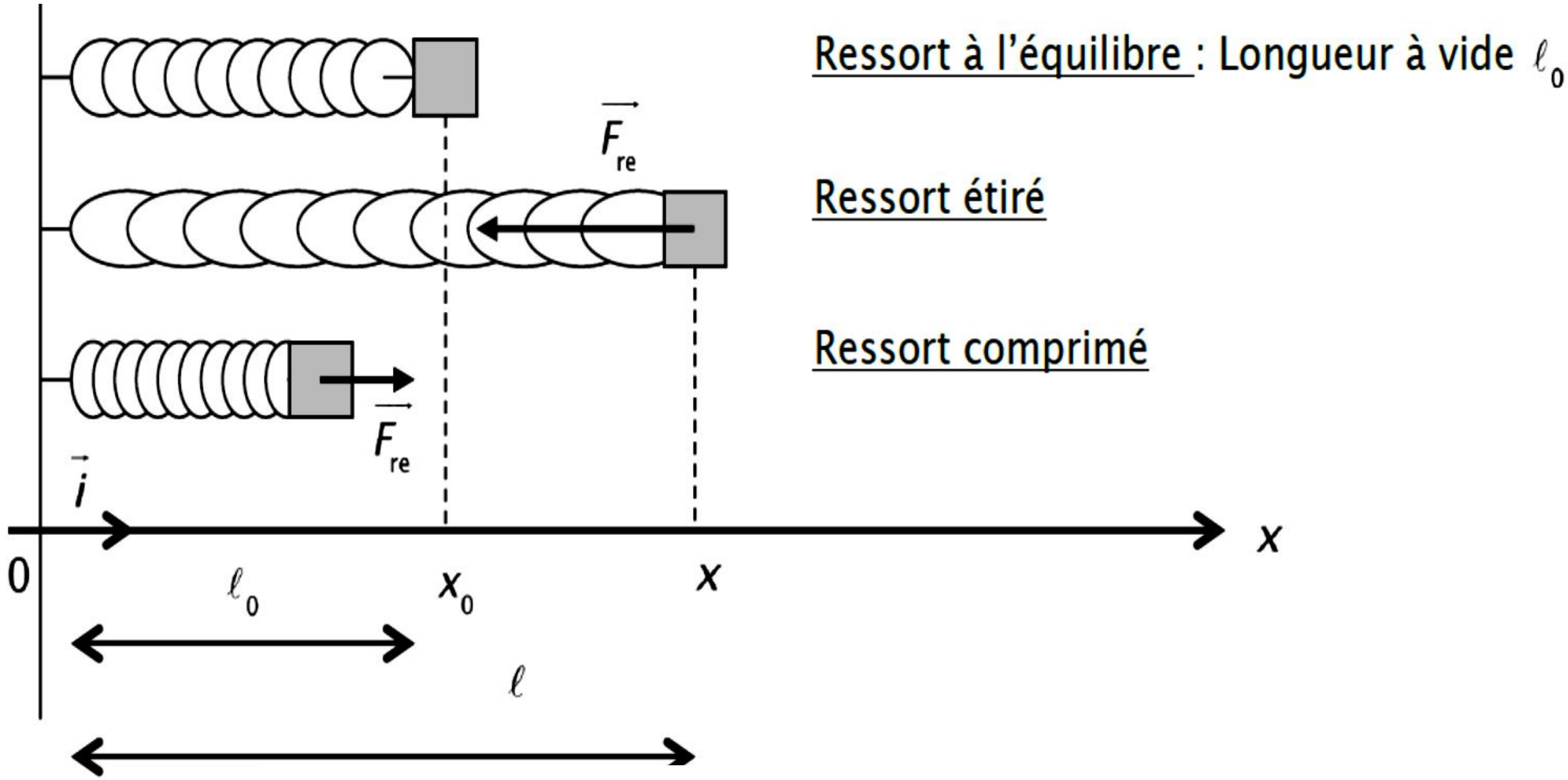
$$\left.\begin{aligned} A &= X_m \cos\varphi = x_0 \\ B &= -X_m \sin\varphi = +\frac{v_0}{\omega} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t}}$$

Et donc :

$$\boxed{\boldsymbol{X_m = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\tan\varphi = -\frac{B}{A} = -\frac{v_0}{\omega x_0}}}$$

# Loi de HOOKE (1)




Loi de Hooke: $\vec{F}_{re} = -k(\ell - \ell_0)\vec{i} = -k(x - x_0)\vec{i}$

# Loi de HOOKE (2)

$k$ est la constante de raideur du ressort (en $N.m^{-1}$). $\ell_0$ est la longueur à vide du ressort (qui correspond ici à la position d'équilibre de la masse, ce n'est plus le cas pour un ressort verticale). $\ell$ est la longueur du ressort à un instant quelconque. Lorsque $x - x_0 > 0$, le ressort est étiré et $\overrightarrow{F_{re}}$ est dirigée suivant $-\vec{\imath}$, le ressort a tendance à ramener la masse vers la position d'équilibre d'abscisse $x_0$ . Lorsque $x - x_0 < 0$, le ressort est comprimé et $\overrightarrow{F_{re}}$ est dirigée suivant $\vec{\imath}$, le ressort a tendance à ramener la masse vers la position d'équilibre d'abscisse. $\overrightarrow{F_{re}}$ a pour effet de **toujours ramener la masse vers la position d'équilibre**. La loi de Hooke n'est pas une « vraie loi de la nature », il s'agit d'une loi phénoménologique.

# Exple d' O.H: Pendule E. Vertical (1)

Nous allons étudier le mouvement d'une masse attachée à un ressort vertical. Nous négligeons tous les frottements.

FIGURE 14.16 Gravity stretches the spring.

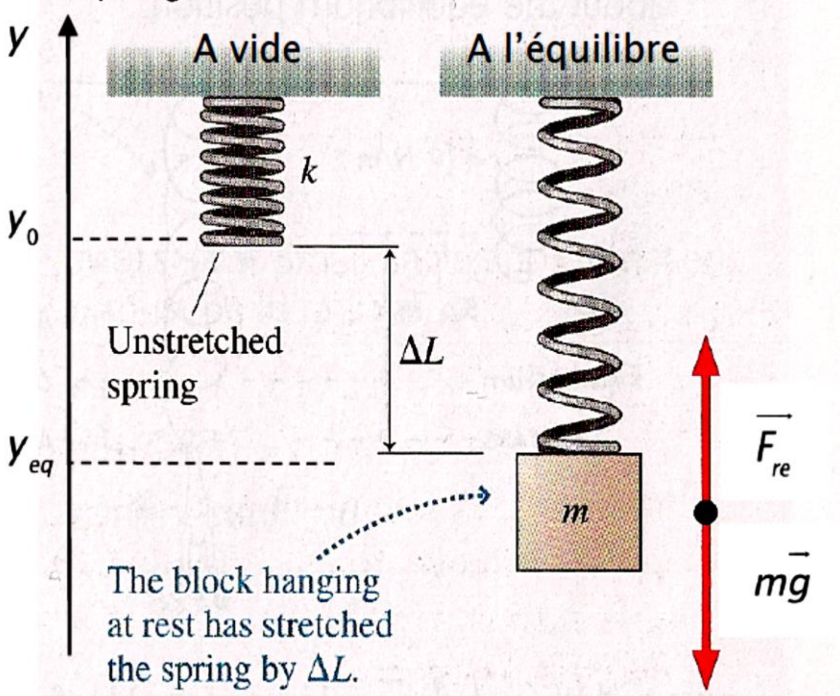
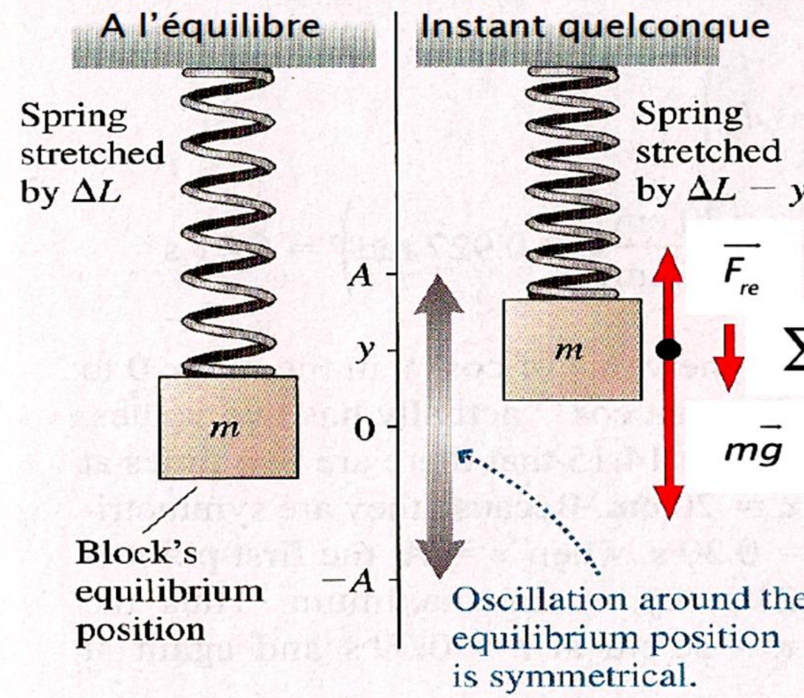



FIGURE 14.17 The block oscillates around the equilibrium position.



# Exple d' O.H: Pendule E. Vertical (2)

- étude à l'équilibre : le PFD donne :

$$\vec{P} + \vec{F}_{re} = \vec{0} \Longrightarrow -mg + k\Delta L = 0$$

- étude en mouvement (instant $t$) : le PFD donne :

$$\vec{P} + \vec{F}_{re} = m\vec{a} \Longrightarrow -mg + k\Delta\ell = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

L'allongement du ressort à l'instant $t$ est : $\Delta\ell = \Delta L - y$

$$\Longrightarrow -mg + k(\Delta L - y\,) = m\frac{d^2y}{dt^2} \Longrightarrow \underbrace{-mg + k\Delta L}_{=0} - ky = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\Longrightarrow -ky = m\frac{d^2y}{dt^2} \Longrightarrow \boxed{\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0}}$$

# Exple d' O.H: Pendule E. Vertical (3)

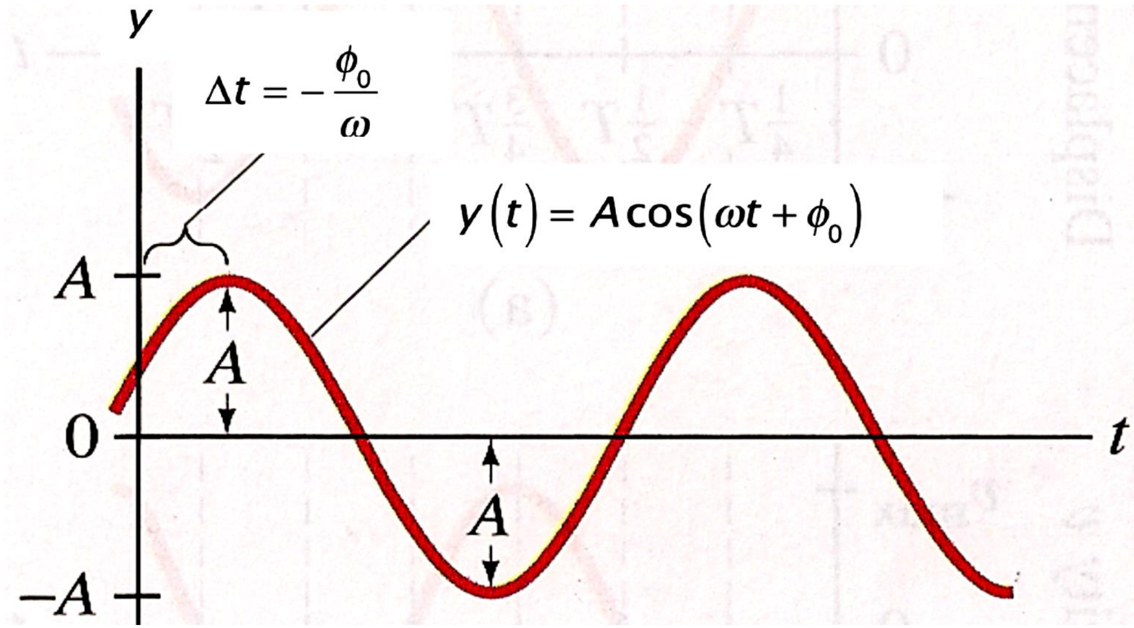
$$y(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} \equiv$ Pulsation dont l'expression dépend du problème physique

$A \equiv$ Amplitude maximale

$\phi_0 \equiv$ phase à l'origine

} à déterminer avec les CI



# Etude Energétique (1)

Nous allons étudier l'oscillateur harmonique sous l'approche énergétique. Il est toujours riche et instructif d'étudier un système physique sous son approche énergétique, il s'agit même souvent de l'étude la plus riche.

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\omega_0^2 = k/m \Longrightarrow k = m\omega_0^2$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

# Etude Energétique (2)

$$\left.\begin{array}{c} x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \dfrac{dx(t)}{dt} = -X_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} E_C = \dfrac{1}{2} m\omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \\ E_P = \dfrac{1}{2} m\omega_0^2 X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

L'énergie mécanique s'écrit alors :

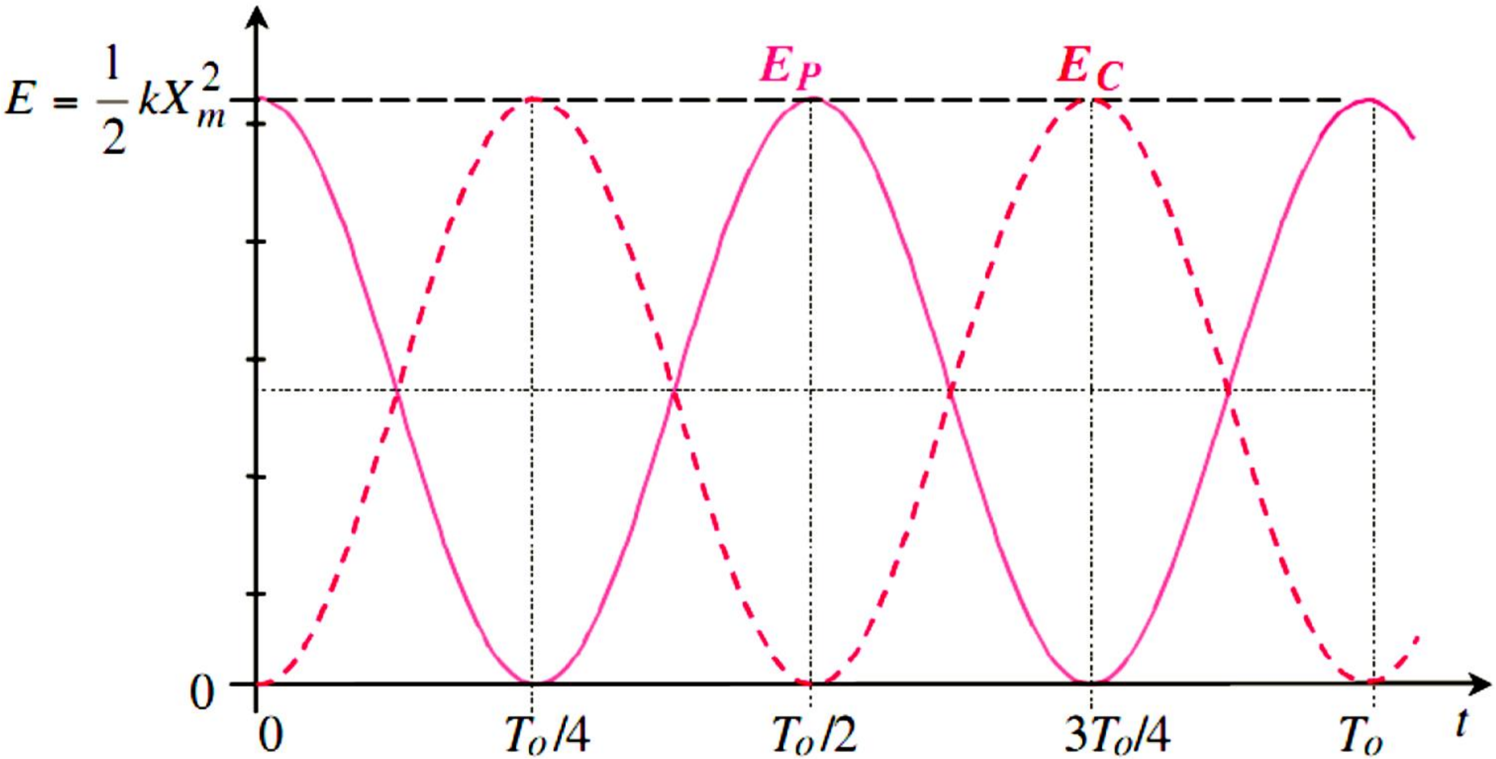
$$E = E_C + E_P = \frac{1}{2} m\omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} m\omega_0^2 X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 X_m^2 [\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)] = \frac{1}{2} m\omega_0^2 X_m^2 = \frac{1}{2} k X_m^2$$

**L'énergie mécanique de ce système conservatif ne varie pas au cours du temps : l'énergie mécanique est une constante du mouvement.**

# Etude Energétique (3)

Il y a échange continuel d'énergie entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique comme le montre le graphe suivant :



# Etude Energétique (4)

- Cet échange continuel se traduit par le fait que :

✓ **lorsque $E_P$ est maximale alors $E_C$ est nulle et minimale,**

✓ **lorsque $E_c$ est maximale alors $E_P$ est nulle et minimale**

- Les énergies potentielle et cinétique oscillent avec une période égale à la moitié de la période propre $T_0$ des oscillations
- On peut déterminer les valeurs moyennes temporelles de ces énergies :

$$< E_P >= \frac{1}{T}\int_0^T E_P dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kX_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\ dt = \frac{1}{2T}kX_m^2 \int_0^T \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\, dt$$

$$\boxed{< E_P >= \frac{1}{4}kX_m^2}$$

# Etude Energétique (5)

$$< E_C >= \frac{1}{T}\int_0^T E_C dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kX_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\ dt = \frac{1}{2T}kX_m^2 \int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\ dt$$

$$\boxed{< E_C >= \frac{1}{4}kX_m^2}$$

$$< E >= \frac{1}{T}\int_0^T E dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kX_m^2 dt = \frac{1}{2T}kX_m^2 \int_0^T dt = \frac{1}{2T}kX_m^2 T$$

$$\boxed{< E >= \frac{1}{2}kX_m^2}$$

$$\boxed{< E_C >=< E_P >= \frac{1}{2} < E >= \frac{1}{4}kX_m^2}$$

# Représentation de Fresnel (1)

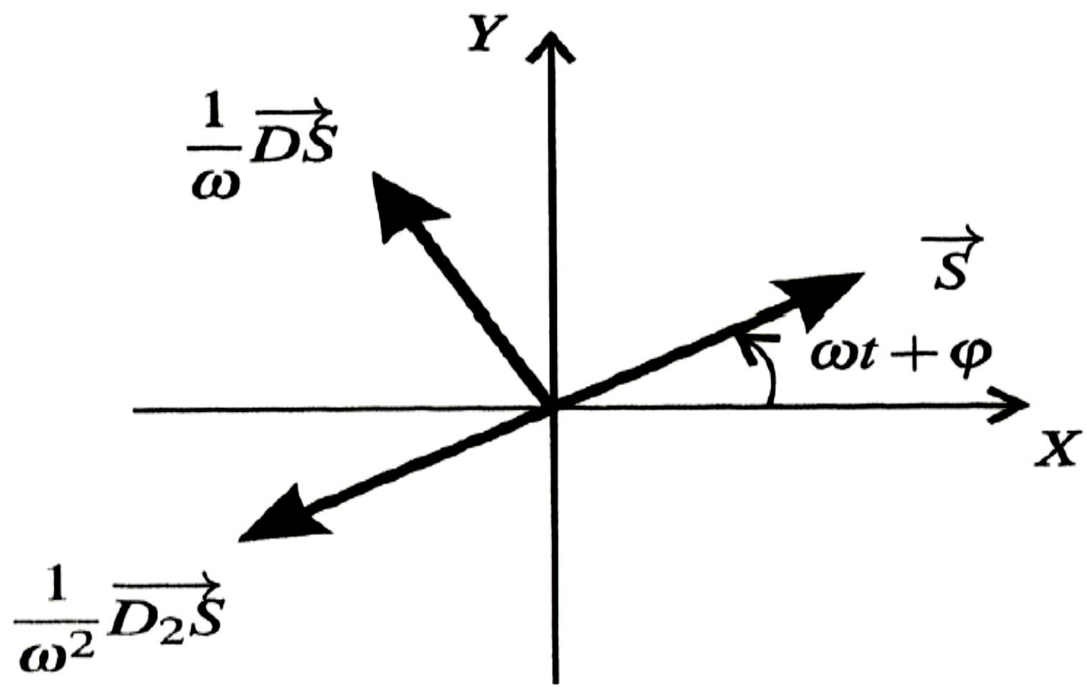
On considère un signal sinusoïdal $s(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ auquel on associe un vecteur appelé **vecteur de Fresnel** qui a une norme égale **à** $X_m$ et qui fait, à l'instant $t$, l'angle $\omega t + \varphi$ avec l'axe des abscisses. Ce vecteur tourne autour de l'origine à la vitesse angulaire $\omega$. On note $\vec{S}$ **le vecteur de Fresnel associé au signal** $s(t)$. Le vecteur de Fresnel associé $ds/dt$ à s'obtient à partir du vecteur de Fresnel associé à $s(t)$ en effectuant les opérations suivantes :

- On tourne le vecteur d'un angle $\pi/2$ dans le sens trigonométrique
- On multiplie la norme du vecteur par ω.

# Représentation de Fresnel (2)

Le vecteur de Fresnel relatif à $ds/dt$ sera noté $\overrightarrow{DS}$ . Si on dérive le signal par deux fois, on tourne le vecteur d'un angle $\pi$ et on multiplie sa norme par $\omega^2$. Ainsi le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{D_2S}$ associé à $d^2s/dt^2$ est :

$$\overrightarrow{D_2S} = -\omega^2\vec{S}$$

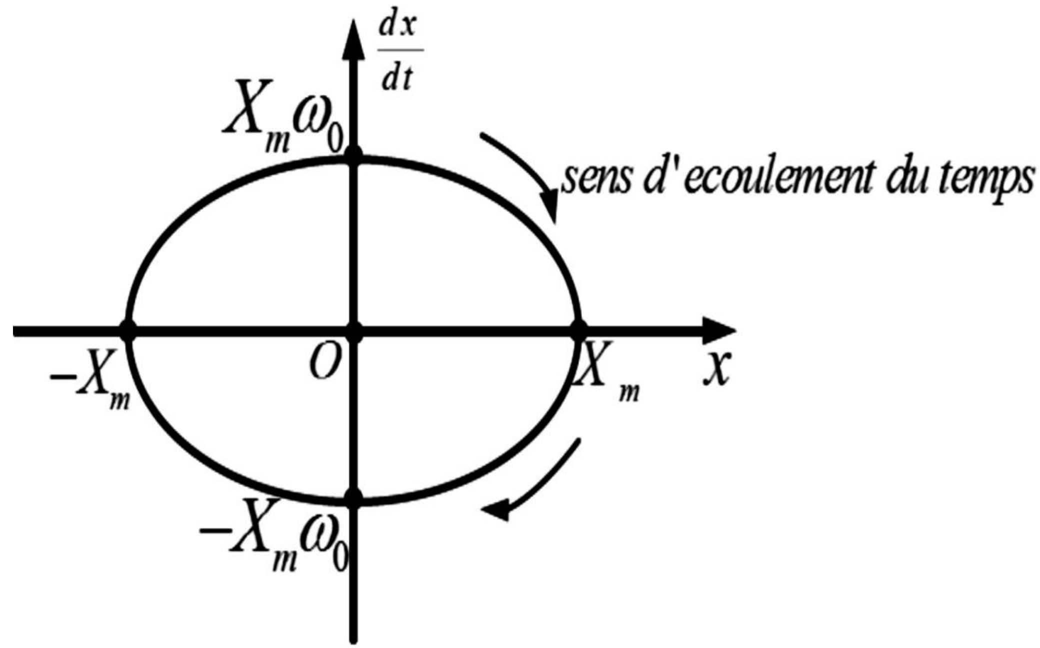


# Portrait de phase d'un O.H (1)

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \Longrightarrow \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \dfrac{x^2(t)}{X_m^2} \\ \dfrac{dx(t)}{dt} = -X_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \Longrightarrow \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \dfrac{(\dot{x})^2}{\omega_0^2 X_m^2} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{X_m^2} + \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{\omega_0^2 X_m^2} = 1$$

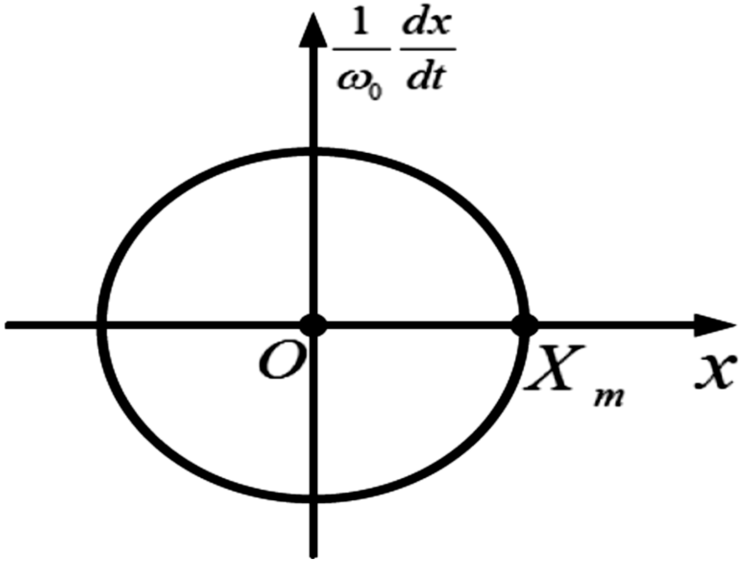
C'est l'équation d'une ellipse de centre $\Omega(0,0)$ de demi-axe $X_m$ et $X_m\omega_0$ dans le plan $(x, \dot{x})$



# Portrait de phase d'un O.H (2)

$$\frac{x^2}{X_m^2}+\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{\omega_0^2X_m^2}=1\Rightarrow x^2+\left(\frac{1}{\omega_0}\frac{dx}{dt}\right)^2=X_m^2$$

C'est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(0,0)$ et de rayon $X_m$




L'énergie est la même pour tous les points du cercle. Plus l'énergie augmente, plus le rayon du cercle est grand.